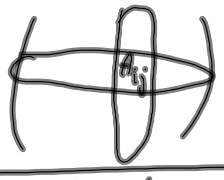
DETERMINANT

Tvrzení Jestliže existuje A^{-1}, potom
$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Mějme matici $A = (A^i_j) = (A_{ij})$.
ALGEBRAICKÝ DOPLNĚK k prvku A_{ij} je $(-1)^{i+j}$-násobek determinantu matice, která vznikne z A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce. Ozn. $\hat{A}_{ij}$. (KOFAKTOR)



Laplaceova věta (o rozvoji determinantu)
Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\det A = \hat{A}_{i1} A_{i1} + \dots + \hat{A}_{in} A_{in}$$
$$= \hat{A}_{1i} A_{1i} + \dots + \hat{A}_{ni} A_{ni}.$$

A ... čtvercová matice. Označme $\hat{A}$ matici algebraických doplňků.
Matice $\operatorname{adj} A = \hat{A}^T$ se nazývá ADJUNGOVANÁ k matici A.

Tvrzení Buď A čtvercová matice s nenulovým determinantem. Pak
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A.$$

Tvrzení

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1k} & A_{1\,k+1} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & & & & \\ A_{k1} & \cdots & A_{kk} & A_{k\,k+1} & \cdots & A_{kn} \\ 0 & \cdots & 0 & A_{k+1\,k+1} & \cdots & A_{k+1\,n} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n\,k+1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1k} \\ \vdots & & \\ A_{k1} & \cdots & A_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{k+1\,k+1} & \cdots & A_{k+1\,n} \\ \vdots & & \\ A_{n\,k+1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

Nechť P je pole, $m, n, i, j \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$, pro každé i, j nechť $a^i_j, b^i \in P$.

Potom

$$\begin{aligned} a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2 + \dots + a^1_n x^n &= b^1 \\ a^2_1 x^1 + a^2_2 x^2 + \dots + a^2_n x^n &= b^2 \\ &\vdots \\ a^m_1 x^1 + a^m_2 x^2 + \dots + a^m_n x^n &= b^m \end{aligned}$$

je SOUSTAVA m LINEÁRNÍCH ROVNIC o n neznámých $x^1, \dots, x^n$.

$A = (a^i_j)$ je MATICE SOUSTAVY, $b = (b^i)$ je sloupec pravých stran, $\bar{A} = (a^i_j \mid b^i)$ je ROZŠÍŘENÁ MATICE SOUSTAVY, $x = (x^j)$ je sloupec neznámých.

Potom $$Ax = b.$$

---

n-tice $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ je ŘEŠENÍ soustavy, jestliže platí rovnost

$$A x_0^T = b.$$

Množinu všech řešení soustavy lin. rovnic nazýváme OBECNÉ ŘEŠENÍ soustavy. Soustavy lin. rovnic jsou EKVIVALENTNÍ, jestliže mají stejná obecná řešení.

Tvrzení Elementární řádkové úpravy rozšířené matice soustavy nemění množinu řešení.

Důkaz Elementární úprava je násobení elementární maticí U zleva. Pak z $Ax = b$ dostaneme $UAx = Ub$. Když x_0 je řešení původní soustavy, $Ax_0^T = b$, potom $UAx_0^T = Ub$ a x_0 je ~~řešením~~ řešením upravené soustavy.

FROBENIOVA VĚTA Soustava lin. rovnic má aspoň jedno řešení právě tehdy, když se hodnost matice soustavy rovná hodnosti rozšířené matice soustavy.

$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A|b$

HOMOGENNÍ SOUSTAVY LIN. ROVNIC

Soustavy s nulovou pravou stranou, $b = 0$.

<u>Tvrzení</u> Lin. kombinace řešení homogenní soustavy je také řešení té soustavy.

<u>Důkaz</u> Nechť x_1, x_2 jsou řešení, $\alpha_1, \alpha_2 \in T$.

Tedy $Ax_1 = 0$, $Ax_2 = 0$.

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 = 0.$$

FUNDAMENTÁLNÍ SYSTÉM ŘEŠENÍ je taková množina řešení homogenní soustavy lin. rovnic, která je lin. nezávislá a každé řešení lze vyjádřit jako lin. kombinaci řešení z této množiny.

<u>Tvrzení</u> Fundamentální systém řešení soustavy $Ax = 0$ o n neznámých má $n - \operatorname{rank} A$ prvků.

NEHOMOGENNÍ SOUSTAVY LIN. ROVNIC

$Ax = b$, potom $Ax = 0$ se nazývá HOMOGENIZOVANÁ soustava.

Tvrzení Nechť x_p je nějaké řešení soustavy $Ax=b$. Potom každé řešení x této soustavy lze psát ve tvaru $x = x_p + x_0$, kde x_0 je řešení homogenizované soustavy.

Důkaz x_p, x jsou řešení. Položme $x_0 = x - x_p$.
Potom $Ax_0 = A(x - x_p) = Ax - Ax_p = b - b = 0$. $\Rightarrow$
x_0 je řešení homogenizované soustavy a $x = x_0 + x_p$.

x_p se nazývá PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ.
Mn. vš. řešení tedy je

$$\{ x_p + x_0 \mid x_0 \text{ je řešení homogenizované soustavy} \}.$$